Profilová maturitní zkouška z matematiky

Maturitní písemná práce z matematiky

školní rok 2022/23

Profilová maturitní zkouška z matematiky trvá 5 hodin čistého času. Při jejím řešení můžete použít psací a rýsovací potřeby, tabulky v tištěné podobě a minikalkulačku bez grafického displeje a možnosti elektronického přenosu dat. Je striktně zakázáno použití mobilu a počítače.

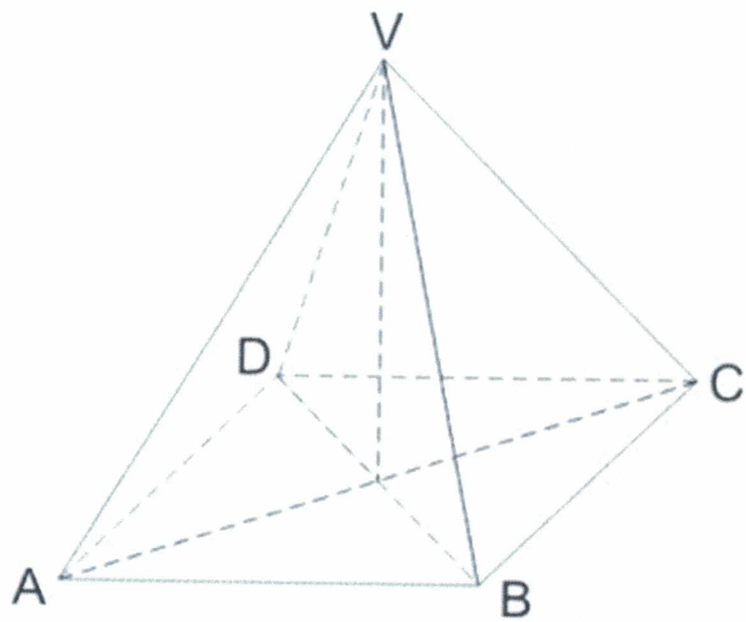
1) Upravte výrazy pro neznámou **a** z množiny reálných čísel a **n** z množiny přirozených čísel. Určete podmínky, za kterých mají smysl: a) $\sqrt[5]{\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-1}}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-3}}$ b) $\frac{4-n^2}{(n+2)!}+\frac{n}{(n+1)!}$	2,5 2,5
2) V množině reálných čísel řešte následující rovnici: $5\cdot\left(4^{\log_3 x}-4^0\right)=4^{\log_3 x+1}-4^{\log_3 x-1}$	3
3) Pomocí Vennových diagramů vypočtěte následující úlohu: Skupina přátel chtěla jít na tři koncerty: Brahmsův, Dvořákův a Janáčkův. Brahmsův koncert přitom ještě neslyšeli tři přátelé, jeden z koncertů nebo žádný z nich slyšelo pět přátel, právě dva koncerty slyšelo sedm přátel. Počet těch, kteří již slyšeli všechny tři koncerty byl o jeden větší než počet těch, kteří neslyšeli žádný z koncertů. Přitom těch, kdo slyšeli všechny tři koncerty nebo žádný z nich bylo celkem sedm. Dvořákův koncert slyšelo devět přátel. a) Kolik přátel bylo celkem? b) Kolik přátel slyšelo pouze Brahmsův koncert?	3
4) V trojúhelníku **ABC** s pravým úhlem při vrcholu **C** je **výška** na stranu **c** dlouhá 5 cm a **odvěsna b** dlouhá 13 cm. Vypočtěte velikost přepony, druhé odvěsny a poloměru kružnice tomuto trojúhelníku opsané. Výsledky vyjadřujte desetinným číslem zaokrouhleným na čtyři platná desetinná místa.	3

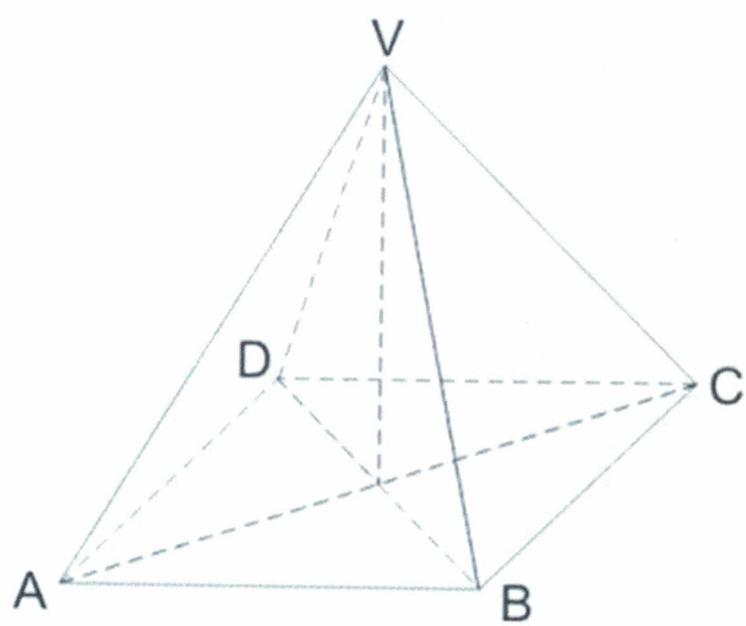
5) Vyřešte: a) Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu **ABCDV** rovinou. $\boldsymbol{OPQ}$: $O \in AB \wedge \lvert AO \rvert = 2\lvert BO \rvert$ $P \in CV \wedge \lvert VP \rvert = 3\lvert CP \rvert$ $Q \in DV \wedge \lvert DQ \rvert = 3\lvert QV \rvert$ Ke každé sestrojené úsečce nebo přímce napište číslo pořadí, ve kterém jste ji rýsovali. Řez pak barevně odlište. Rýsujte do zvětšeného jehlanu na samostatném papíře, který je do zadání vložen. b) Vypočtěte odchylku $\boldsymbol{\varphi}$ hrany **AV** od roviny **ABC**, jestliže podstavná hrana i výška jehlanu mají délku **a**. Odchylku vyjádřete ve stupních a minutách.	3 2
6) Napište obecnou rovnici roviny $\boldsymbol{\varrho}$, ve které leží body $A[2;\ 3;\ 0], B[-1;\ 2; 2]$. Rovina $\boldsymbol{\varrho}$ je kolmá k rovině $\boldsymbol{\sigma}$: $3x - 2y + z + 6 = 0$.	3
7) Spočítejte zadané limity a zapište postup: a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \mathrm{tg}^2\, x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^{x+3}+4}{2^{x-1}+1}$	2 2
8) Pomocí vhodné metody vypočtěte následující primitivní funkce: a) $\int \cos x(\sin x + 7)^2 dx$ b) $\int e^x \cos x\, dx$	2 2
9) Kuželosečka daná rovnicí $x^2 + 4y^2 = 4$ omezí rotací kolem osy x rotační těleso. Načrtněte danou kuželosečku. Vypočtěte objem rotačního tělesa.	3
10) Pomocí první a druhé derivace vypočtěte u funkce $f(x) = x^3 - 3x + 2$ souřadnice bodu $M[x, y]$ jako jejího lokálního minima, souřadnice bodu $N[x, y]$ jako jejího lokálního maxima a souřadnice inflexního bodu $I[x, y]$.	3

Následující úlohy (11-17) jsou úlohy s výběrem. Z každé úlohy si proto vyberte jeden příklad; jasně vyznačte (např. zakroužkováním v zadání), který z nich má být klasifikován.	
11) Vyberte si **jednu z následujících úloh** a vyřešte ji: A. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Obvod trojúhelníku je 192 cm. Vypočtěte diferenci **d** této aritmetické posloupnosti a délky stran trojúhelníku. B. Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí: $a_2 \cdot a_3 = 9$ $a_2 + a_3 = 10$	**3** **3**
12) Vyberte si **jednu z goniometrických rovnic** a vyřešte ji. Nezapomeňte na podmínky. A. $\cotg x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 1$ B. $\cotg x - 1 = \frac{4 \cdot \cos 2x}{1+\operatorname{tg} x}$	**3** **3**
13) Vyberte si **jednu rovnici** a pak ji vyřešte. Nezapomeňte na podmínky. A. $\sum_{n=1}^{\infty}(4-3x)^n = -\frac{1}{2x}$ B. $1 + \log x + (1 + \log x)^2 + (1 + \log x)^3 + \cdots = -6 \cdot \log x$	**3** **3**
14) Vyberte si **jednu z následujících úloh** a pak ji vyřešte. A. Určete $x \in R$ tak, aby pátý člen binomického rozvoje $\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^9$ byl roven 4032. B. Vyřešte rovnici s neznámou $x \in C$. Výsledek zapište v goniometrickém tvaru. Kořeny znázorněte v Gaussově rovině. $x^3 - 1 - i = 0$	**3** **3**

15) Vyberte si **jednu z následujících úloh** a pak ji vyřešte. A. V krabičce je 10 pastelek, z toho 4 stejné červené, 3 stejné modré, 2 stejné žluté a 1 zelená pastelka. Kolika způsoby lze pastelky v krabičce uspořádat, mají-li ležet v jedné řadě vedle sebe špičkami stejným směrem? B. Kolik pěticiferných čísle lze sestavit z cifer 1, 2, 3, 4, 5 a 6, jestliže se cifry mohou opakovat?	**2** **2**
16) Vyberte si **jednu z následujících úloh** a pak ji vyřešte. A. Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí: $1 < \|z + 3i - 2\| \leq 4$ B. Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí: $\|z - 1 - 3i\| \geq \|z + 2i\|$	**2** **2**
17) Vyberte si **jednu z následujících úloh** a pak ji vyřešte. A. Úpravou na středový (vrcholový) tvar rozhodněte jakou kuželosečku vyjadřuje rovnice $x^2 - 9y^2 - 2x - 8 = 0$ Určete charakteristické prvky kuželosečky, načrtněte obrázek. B. Úpravou na středový (vrcholový) tvar rozhodněte jakou kuželosečku vyjadřuje rovnice $y^2 + 3x - 4 = 0$ Určete charakteristické prvky kuželosečky, načrtněte obrázek.	**3** **3**

Jehlan k příkladu číslo 5:





ŘEŠENÍ

1) Upravte výrazy pro neznámou **a** z množiny reálných čísel a **n** z množiny přirozených čísel. Určete podmínky, za kterých mají smysl:

a) $\sqrt[5]{\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-1}}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-3}}$

b) $\frac{4-n^2}{(n+2)!}+\frac{n}{(n+1)!}$

---

a) $$\sqrt[5]{\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-1}}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-3}} = \left(a^{\frac{1}{2}-1-\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{3}{5}} = \left(a^{\frac{3-6-2}{6}}\right)^{-\frac{3}{5}} =$$

$$= a^{-\frac{5}{6}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

podmínka: $\boxed{a > 0}$

0,5

2

b) $$\frac{4-n^2}{(n+2)!}+\frac{n}{(n+1)!} = \frac{-(n^2-4)+n(n+2)}{(n+2)!} =$$

$$= \frac{-n^2+4+n^2+2n}{(n+2)!} = \frac{2(n+2)}{(n+2)(n+1)!} = \frac{2}{(n+1)!}$$

2

podmínka: $\boxed{n \geq -1}$

0,5

$n \in \mathbb{N}$

2) V množině reálných čísel řešte následující rovnici:

$$5 \cdot \left(4^{\log_3 x} - 4^0\right) = 4^{\log_3 x+1} - 4^{\log_3 x-1}$$

3

$$5\left(4^{\log_3 x} - \underbrace{4^0}_{1}\right) = 4^{\log_3 x + 1} - 4^{\log_3 x - 1}$$

$$5\left(4^{\log_3 x} - 1\right) = 4^{\log_3 x} \cdot 4 - \frac{4^{\log_3 x}}{4}$$

1

substituce:

$$4^{\log_3 x} = y \quad \ldots\ldots \quad 5(y-1) = 4y - \frac{y}{4} \quad / \cdot 4$$

$$20y - 20 = 16y - y$$

$$5y = 20$$

$$\underline{\underline{y = 4}}$$

1

$$4^{\log_3 x} = 4^1$$

$$\log_3 x = 1$$

$$\underline{\underline{x = 3}}$$

0,5

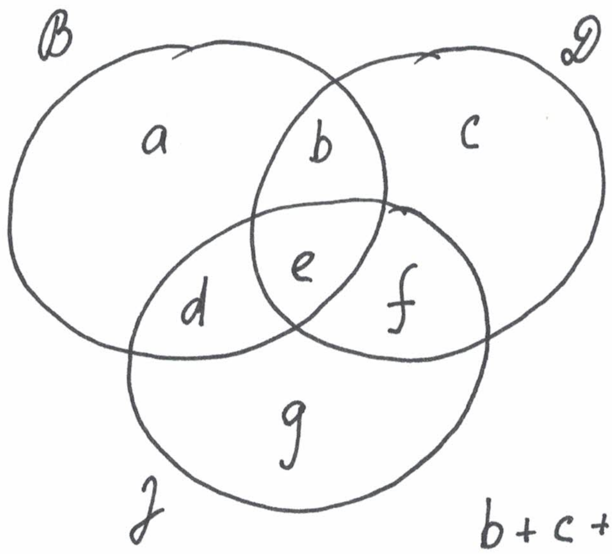
podmínka: $x > 0$

0,5

3) Pomocí Vennových diagramů vypočtěte následující úlohu:

Skupina přátel chtěla jít na tři koncerty: Brahmsův, Dvořákův a Janáčkův. Brahmsův koncert přitom ještě neslyšeli tři přátelé, jeden z koncertů nebo žádný z nich slyšelo pět přátel, právě dva koncerty slyšelo sedm přátel. Počet těch, kteří již slyšeli všechny tři koncerty byl o jeden větší než počet těch, kteří neslyšeli žádný z koncertů. Přitom těch, kdo slyšeli všechny tři koncerty nebo žádný z nich bylo celkem sedm. Dvořákův koncert slyšelo devět přátel.

a) Kolik přátel bylo celkem?
b) Kolik přátel slyšelo pouze Brahmsův koncert?



$c + f + g + h = 3$

$a + c + g + h = 5$

$b + f + d = 7$

$\left.\begin{array}{l} e = 1 + h \\ e + h = 7 \end{array}\right\}$ $2e + h = 8 + h$

$2e = 8$

$\underline{\underline{e = 4}}$

$\underline{\underline{h = 3}}$ 1

$b + c + e + f = 9$

$c + f + g = 0 \Rightarrow \underline{\underline{c = 0}}$

$\underline{\underline{f = 0}}$

$\underline{\underline{g = 0}}$

$a + c + g = 2 \Rightarrow \underline{\underline{a = 2}}$

$b + 0 + d = 7$

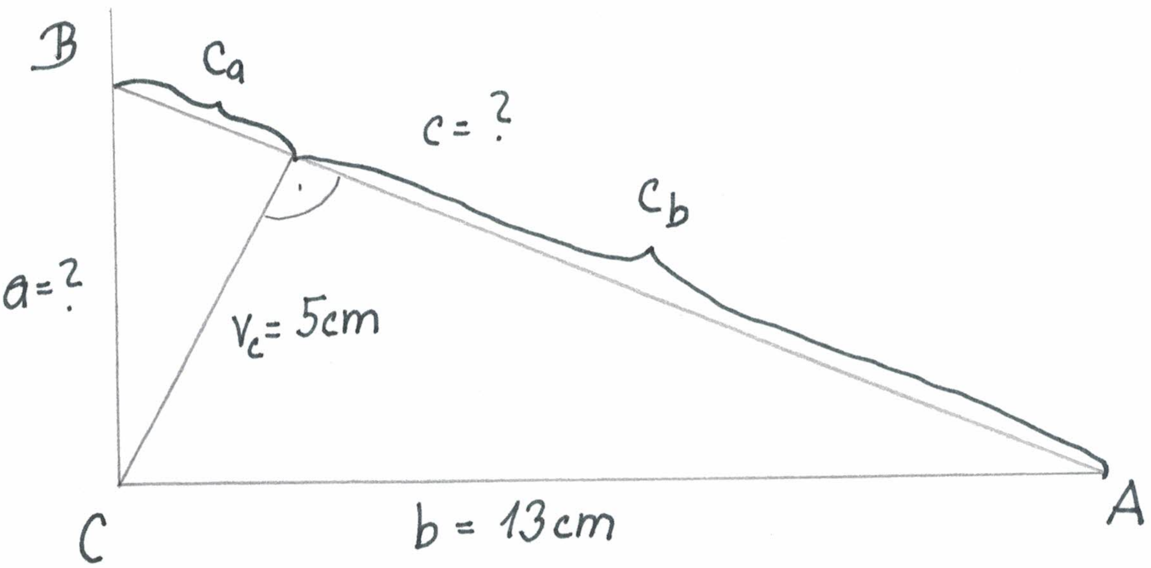
$b + 0 + 4 + 0 = 9 \Rightarrow \underline{b = 5}$ 1

$\underline{\underline{d = 2}}$

a) $2 + 5 + 0 + 2 + 4 + 0 + 0 + 3 = \underline{\underline{16}}$ 1

b) $\underline{\underline{a = 2}}$

4) V trojúhelníku **ABC** s pravým úhlem při vrcholu **C** je **výška** na stranu **c** dlouhá 5 cm a **odvěsna b** dlouhá 13 cm. Vypočtěte velikost přepony, druhé odvěsny a poloměru kružnice tomuto trojúhelníku opsané. Výsledky vyjadřujte desetinným číslem zaokrouhleným na čtyři platná desetinná místa.



Eukl. v.: $5^2 = c_a \cdot c_b$

$13^2 = c \cdot c_b$

$c_b = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \underline{\underline{12}}\ cm$

$c_a = \dfrac{25}{12} \doteq 2{,}0833\ cm$

$c \doteq 12 + 2{,}0833 \doteq \underline{\underline{14{,}0833\ cm}}$ 1

$r_0 = \dfrac{c}{2} = \dfrac{14{,}0833}{2} \doteq \underline{\underline{7{,}041\overline{6}\ cm}}$ 1

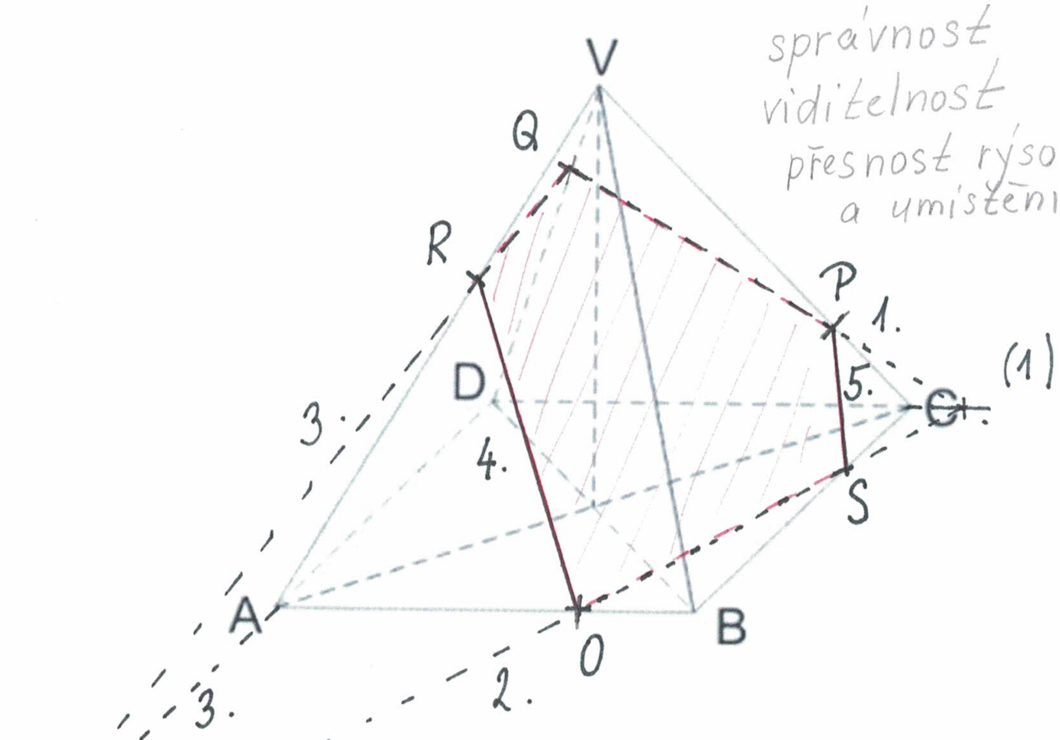
Pyth. v.: $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{14{,}0833^2 - 13^2} \doteq \underline{\underline{5{,}4166\ cm}}$ 1

5) Vyřešte:

a) Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu **ABCDV** rovinou.
$\boldsymbol{OPQ}$:
$O \in AB \wedge |AO| = 2|BO|$
$P \in CV \wedge |VP| = 3|CP|$
$Q \in DV \wedge |DQ| = 3|QV|$
Ke každé sestrojené úsečce nebo přímce napište číslo pořadí, ve kterém jste ji rýsovali. Řez pak barevně odlište. Rýsujte do zvětšeného jehlanu na samostatném papíře, který je do zadání vložen.

b) Vypočtěte odchylku $\boldsymbol{\varphi}$ hrany **AV** od roviny **ABC**, jestliže podstavná hrana i výška jehlanu mají délku **a**. Odchylku vyjádřete ve stupních a minutách.

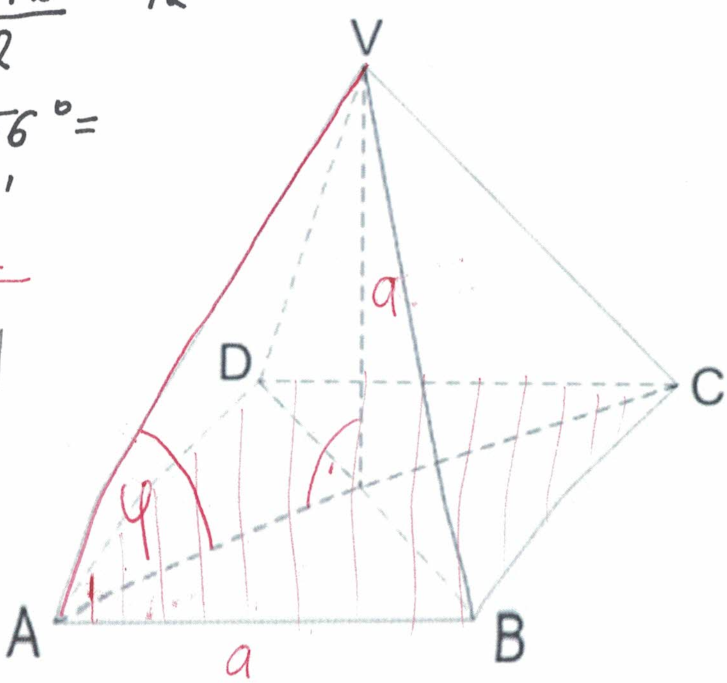
správnost 1
viditelnost 1
přesnost rýsování a umístění P, Q, O 1



b) $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ 1

$\varphi = 54{,}7356° =$
$= 54°44'$

1



6) Napište obecnou rovnici roviny ϱ, ve které leží body $A[2;\ 3;\ 0], B[-1;\ 2;\ 2]$. Rovina ϱ je kolmá k rovině σ: $3x - 2y + z + 6 = 0$.

ρ: $A[2, 3, 0]$, $B[-1, 2, 2]$ $\Big\}$ $\vec{s} = (-3; -1; 2)$

$\rho \perp \sigma$: $3x - 2y + z + 6 = 0$

$\vec{s} = (-3; -1; 2)$

$\vec{n_\sigma} = \vec{s_\rho} = (3; -2; 1)$ $\Big\}$ 1

$\vec{s} \times \vec{n} = (3; 9; 9) = (1; 3; 3)$ 1

ρ: $x + 3y + 3z + d = 0$

$A \in \rho$: $2 + 9 + 0 + d = 0$

$d = -11$

(nebo B) $\to$ $-1 + 6 + 6 + d = 0$

$d = -11$

ρ: $\underline{\underline{x + 3y + 3z - 11 = 0}}$ 1

7) Spočítejte zadané limity a zapište postup:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \mathrm{tg}^2\, x \right)$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2^{x+3}+4}{2^{x-1}+1}$

a) $= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,(1-\sin x)}{1-\sin^2 x} =$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{1}{1+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

2

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2^{x+3}+4}{2^{x-1}+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2^x \cdot 2^3 + 2^2}{2^x \cdot 2^{-1} + 2^0} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2^x \left(2^3 + \frac{4}{2^x}\right)}{2^x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^x}\right)} =$

$= \frac{8+0}{\frac{1}{2}+0} = \underline{\underline{16}}$

2

8) Pomocí vhodné metody vypočtěte následující primitivní funkce:

a) $\int \cos x(\sin x + 7)^2 dx$

b) $\int e^x \cos x \, dx$

a) $\int \cos x \, (\sin x + 7)^2 dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}(\sin x + 7)^3 + C$

substituce:

$\sin x + 7 = t$

$\cos x \, dx = dt$

2

b) $\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx =$

per partes:

$u = \cos x \quad v' = e^x$

$u' = -\sin x \quad v = e^x$

$u = \sin x \quad v' = e^x$

$u' = \cos x \quad v = e^x$

$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$

rovnice: $2 \int e^x \cos x \, dx = e^x (\cos x + \sin x)$

$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C$

2

9) Kuželosečka daná rovnicí $x^2 + 4y^2 = 4$ omezí rotací kolem osy x rotační těleso. Načrtněte danou kuželosečku. Vypočtěte objem rotačního tělesa.

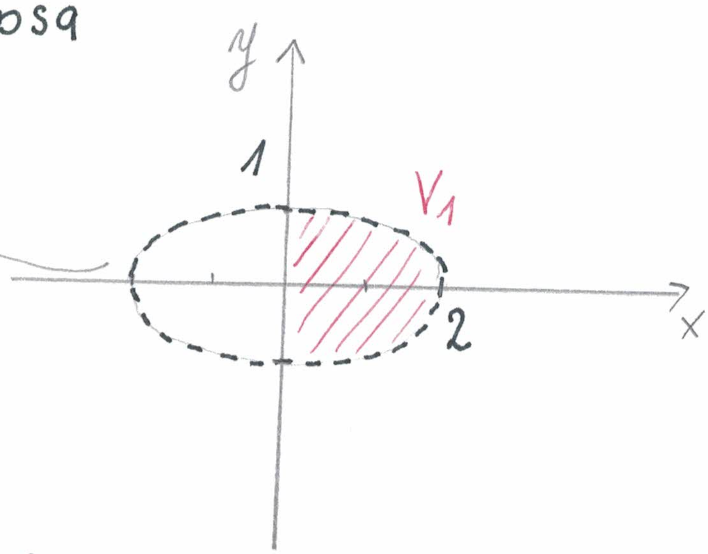
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \text{.... elipsa}$$

$a^2 = 4$

$a = 2$

$b = 1$

0,5



$$4y^2 = 4 - x^2$$

$$y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$$

$$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

0,5

$$V_1 = \pi \int_0^2 \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right)^2 dx =$$

1

$$= \pi \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx = \pi \left([x]_0^2 - \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \right) =$$

$$= \pi \left[(2-0) - \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3} - 0\right) \right] = \pi \cdot \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

0,5

$$V = 2 \cdot V_1 = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi \text{ j}^3$$

0,5

10) Pomocí první a druhé derivace vypočtěte u funkce $f(x) = x^3 - 3x + 2$ souřadnice bodu $M[x, y]$ jako jejího lokálního minima, souřadnice bodu $N[x, y]$ jako jejího lokálního maxima a souřadnice inflexního bodu $I[x, y]$.

$y' = 3x^2 - 3 = 0$

$3(x-1)(x+1) = 0$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$

$y'' = 6x$

$y''(1) = 6 > 0$ ... lok. min.

$y = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$

$\boxed{M[1; 0] \text{ lok. min.}}$ 1

$y''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$ .... lok. max.

$y = (-1)^3 + 3 + 2 = 4$

$\boxed{N[-1; 4] \text{ lok. max.}}$ 1

$y'' = 6x = 0$

$x = 0$ .... infl. bod

$y = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$

$\boxed{I[0; 2] \text{ infl. bod}}$ 1

Následující úlohy (11-17) jsou úlohy s výběrem. Z každé úlohy si proto vyberte jeden příklad; jasně vyznačte (např. zakroužkováním v zadání), který z nich má být klasifikován.

11) Vyberte si **jednu z následujících úloh** a vyřešte ji:

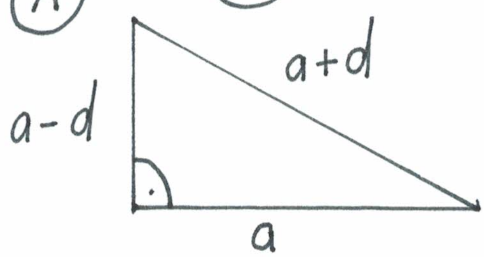
A. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Obvod trojúhelníku je 192 cm. Vypočtěte diferenci **d** této aritmetické posloupnosti a délky stran trojúhelníku. 3

B. Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí: 3

$a_2 \cdot a_3 = 9$

$a_2 + a_3 = 10$

A AP



$a - d + a + a + d = 192$

$3a = 192$

$a = 64\,cm$ 1

Pyth. v.: $a^2 + (a-d)^2 = (a+d)^2$

$64^2 + (64-d)^2 = (64+d)^2$

$64^2 + 64^2 - 128d + d^2 = 64^2 + 128d + d^2$

$64^2 = 256d$

$16\,cm = d$ 1

délky stran: 1

48 cm; 64 cm; 80 cm

B GP

$a_2 \cdot a_3 = 9$

$a_2 + a_3 = 10$

$a_2 = \frac{9}{a_3}$

$\frac{9}{a_3} + a_3 = 10$ 2

$9 + a_3^2 = 10a_3$

$a_3^2 - 10a_3 + 9 = 0$

$(a_3 - 1) \cdot (a_3 - 9) = 0$

$a_3 = 1 \dots a_2 = 9$

$a_3 = 9 \dots a_2 = 10 - 9 = 1$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{2 řešení:} \\ 1)\ a_1 = 81;\ a_2 = 9;\ a_3 = 1 \dots q = \frac{1}{9} \\ 2)\ a_1 = \frac{1}{9};\ a_2 = 1;\ a_3 = 9 \dots q = 9 \end{array}}$ 1

12) Vyberte si **jednu z goniometrických rovnic** a vyřešte ji. Nezapomeňte na podmínky.

A. $\operatorname{cotg} x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 1$

B. $\operatorname{cotg} x - 1 = \frac{4 \cdot \cos 2x}{1+\operatorname{tg} x}$

(A) $\operatorname{cotg} x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 1$

$x \neq k\pi$
$k \in \mathbb{Z}$

podmínka

$1+\cos x \neq 0$ 1

$\cos x \neq -1$

$x \neq \pi + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

$\frac{\cos x\,(1+\cos x)}{\sin x} + \sin x = 1+\cos x \quad / \cdot \sin x$

$\cos x + \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1} = \sin x + \sin x \cos x$

$\cos x + 1 - \sin x - \sin x \cdot \cos x = 0$

$(\cos x + 1) - \sin x\,(1+\cos x) = 0$

$(\cos x + 1)(1 - \sin x) = 0$ 1

1

$\cos x + 1 = 0$
nevyhovuje podmínce

$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

(B) podmínky: $x \neq k\pi \wedge \operatorname{tg} x \neq -1$
$x \neq \frac{3}{4}\pi + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ 1

$\operatorname{cotg} x - 1 = \frac{4 \cos 2x}{1+\operatorname{tg} x}$

$\frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{4(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}}$

1

$\frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{4(\cos^2 x - \sin^2 x)\cdot \cos x}{\cos x + \sin x}$

$\frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{4(\cos x - \sin x)\cdot \cos x}{1}$

$\cos x - \sin x = 4(\cos x - \sin x)\cdot \sin x \cdot \cos x$

$(\cos x - \sin x) - 4(\cos x - \sin x)\cdot \sin x \cdot \cos x = 0$

$(\cos x - \sin x)(1 - 2 \cdot \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x}) = 0$

$\cos x - \sin x = 0 \quad /:\cos x$

$\operatorname{tg} x = 1$

$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

$1 - 2\sin 2x = 0$

$\sin 2x = \frac{1}{2}$

$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$x_2 = \frac{\pi}{12} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

$2x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

$x_3 = \frac{5}{12}\pi + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

1

13) Vyberte si **jednu rovnici** a pak ji vyřešte. Nezapomeňte na podmínky.

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(4-3x)^n = -\frac{1}{2x}$ 3

B. $1+\log x+(1+\log x)^2+(1+\log x)^3+\cdots = -6\cdot\log x$ 3

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(4-3x)^n = -\frac{1}{2x}$

$q = |4-3x| < 1$

$|3x-4| < 1$

$|x-\frac{4}{3}| < \frac{1}{3}$

$x \in (1; \frac{5}{3})$ podmínka 1

$s_n = \frac{4-3x}{1-(4-3x)} = -\frac{1}{2x}$

$\frac{4-3x}{-3+3x} = -\frac{1}{2x}$

$2x(4-3x) = -1(-3+3x)$

$8x-6x^2 = 3-3x$

$-6x^2+11x-3=0$

$6x^2-11x+3=0$ 1

$x_{1,2} = \frac{11\pm\sqrt{121-4\cdot6\cdot3}}{12} = \frac{11\pm7}{12} = \begin{cases}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{3}\end{cases}$ nevyhovuje

$x = \frac{3}{2}$ 1

(B) $q = 1+\log x$; podmínky: $|1+\log x| < 1$

$1+\log x < 1$

$\log x < 0$

$x < 1$

$-1-\log x < 1$

$-\log x < 2$

$\log x > -2$

$x > 0{,}01$

$x \in (0{,}01; 1)$ 1

$s = \frac{1+\log x}{1-1-\log x} = -6\cdot\log x$

$1+\log x = 6\cdot\log^2 x$ 1

$0 = 6\log^2 x-\log x-1$

$\log x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot6\cdot1}}{12} = \frac{1\pm5}{12} = \begin{cases}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2}\end{cases}$

$x_1 = 10^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}} = \frac{\sqrt[3]{100}}{10}$

$x_2 = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ 1

nevyhovuje podmínce

14) Vyberte si **jednu z následujících úloh** a pak ji vyřešte.

A. Určete $x \in R$ tak, aby pátý člen binomického rozvoje $\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^9$ byl roven 4032.

B. Vyřešte rovnici s neznámou $x \in C$. Výsledek zapište v goniometrickém tvaru. Kořeny znázorněte v Gaussově rovině.
$x^3 - 1 - i = 0$

A $\quad \binom{9}{4} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^5 \cdot \left(-\sqrt{x}\right)^4 = 4032$ 1

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{32}{x^5} \cdot x^2 = 4032$$ 1

$$\frac{9 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 32}{x^3} = 4032$$

$$\frac{4032}{4032} = x^3$$

$$\underline{\underline{1 = x}}$$ 1

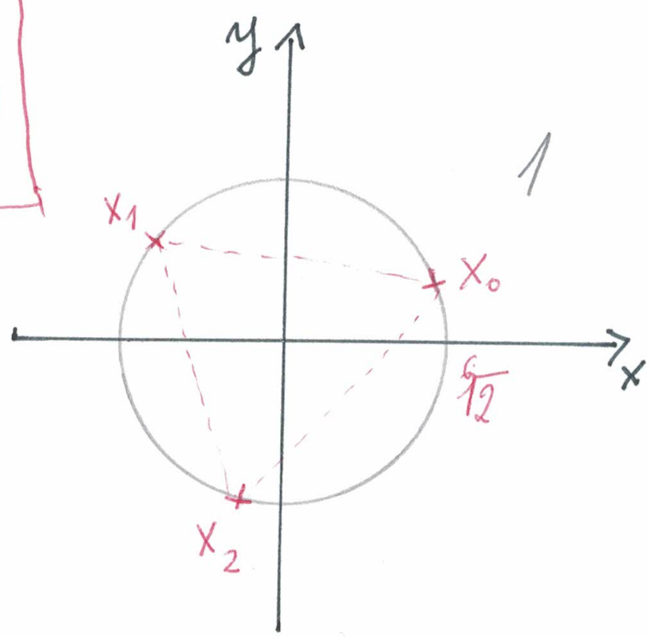
B $\quad x^3 - (1+i) = 0$ 1

$$x^3 - \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$x_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right) k = 0; 1, 2$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \\ x_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9}{12}\pi + i\sin\frac{9}{12}\pi\right) \\ x_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi + i\sin\frac{17}{12}\pi\right) \end{aligned}}$$

1



1

15) Vyberte si **jednu z následujících úloh** a pak ji vyřešte.

A. V krabičce je 10 pastelek, z toho 4 stejné červené, 3 stejné modré, 2 stejné žluté a 1 zelená pastelka. Kolika způsoby lze pastelky v krabičce uspořádat, mají-li ležet v jedné řadě vedle sebe špičkami stejným směrem?

B. Kolik pěticiferných čísle lze sestavit z cifer 1, 2, 3, 4, 5 a 6, jestliže se cifry mohou opakovat?

A $P'(4,3,2,1) = \dfrac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 2\cdot 1} = \underline{\underline{12\,600}}$ 2

B $V'(5,6) = 6^5 = \underline{\underline{7\,776}}$ 2

16) Vyberte si **jednu z následujících úloh** a pak ji vyřešte.

A. Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí:
$1 < |z + 3i - 2| \leq 4$

2

B. Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí:
$|z - 1 - 3i| \geq |z + 2i|$

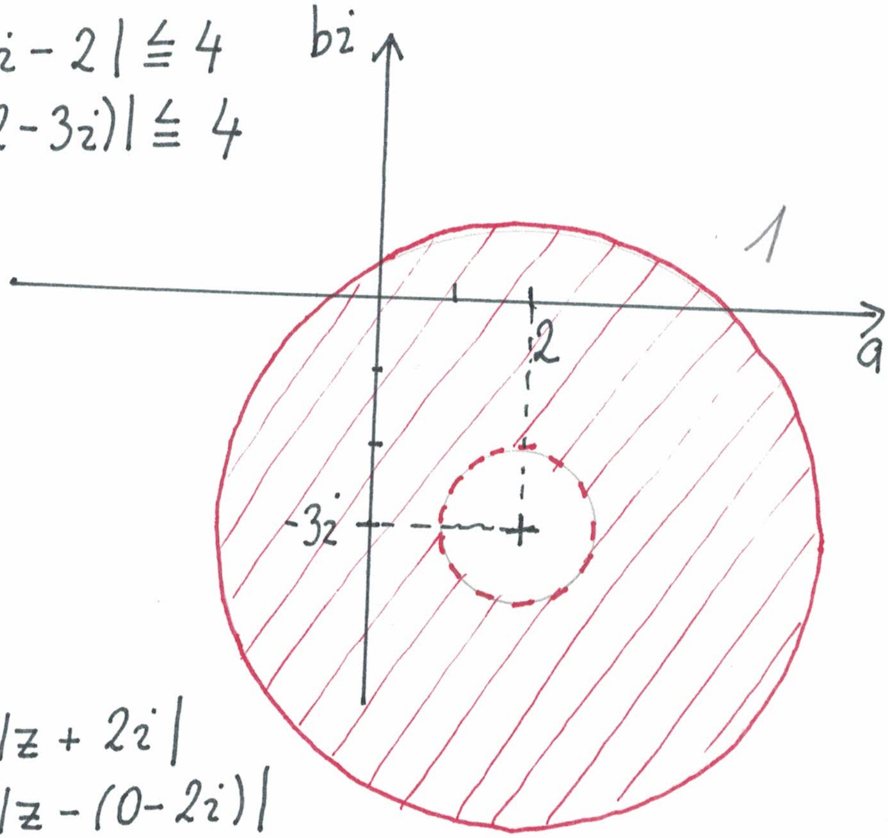
2

A

$1 < |z + 3i - 2| \leqq 4$

$1 < |z - (2 - 3i)| \leqq 4$

1



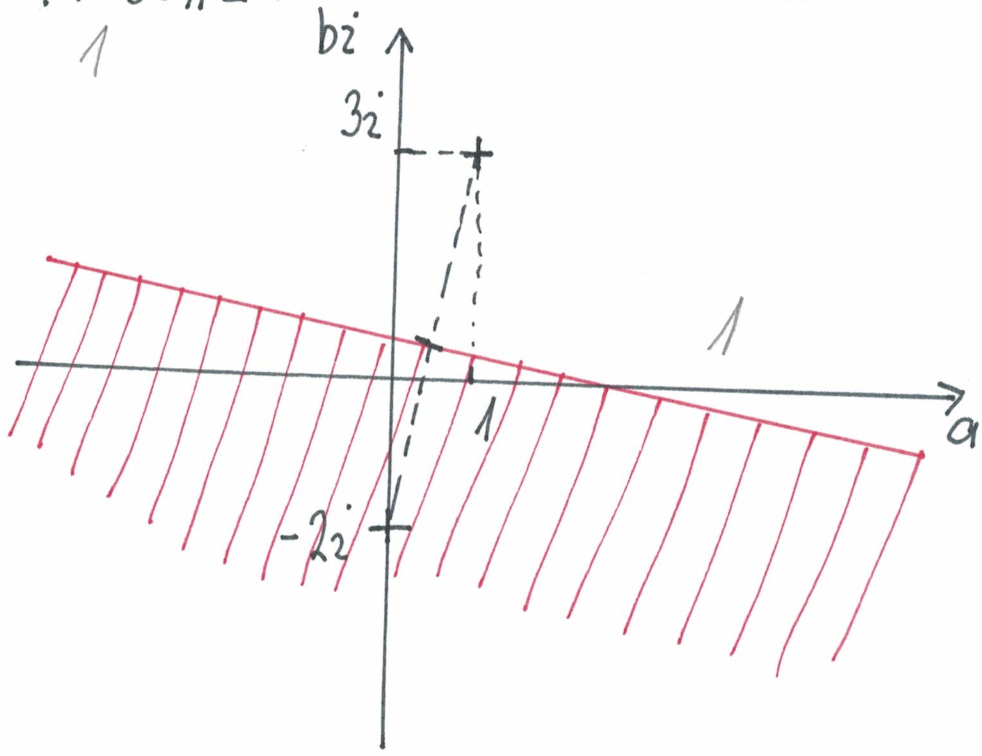
1

B

$|z - 1 - 3i| \geqq |z + 2i|$

$|z - (1 + 3i)| \geqq |z - (0 - 2i)|$

1



1

17) Vyberte si **jednu z následujících úloh** a pak ji vyřešte.

A. Úpravou na středový (vrcholový) tvar rozhodněte jakou kuželosečku vyjadřuje rovnice
$x^2 - 9y^2 - 2x - 8 = 0$
Určete charakteristické prvky kuželosečky, načrtněte obrázek. 3

B. Úpravou na středový (vrcholový) tvar rozhodněte jakou kuželosečku vyjadřuje rovnice
$y^2 + 3x - 4 = 0$
Určete charakteristické prvky kuželosečky, načrtněte obrázek. 3

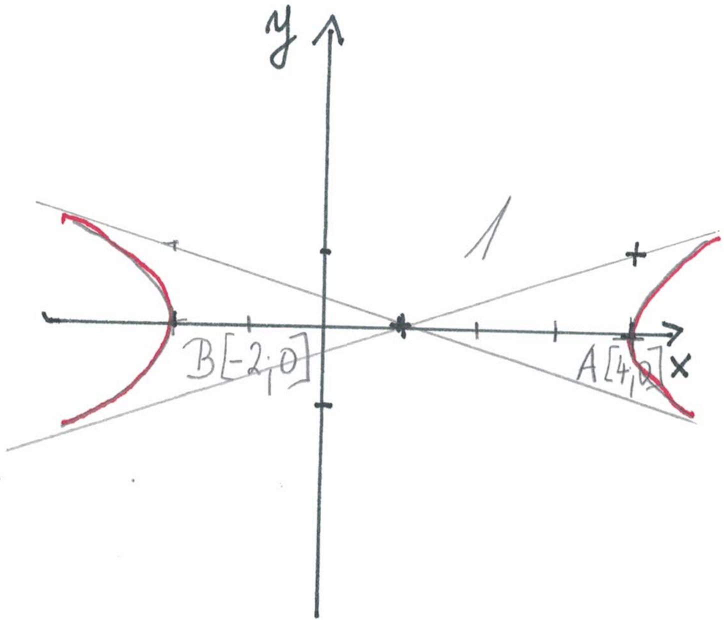
A)

$$x^2 - 9y^2 - 2x - 8 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 - 9y^2 = 1 + 8$$
$$(x-1)^2 - 9y^2 = 9 \quad /:9$$
$$\frac{(x-1)^2}{9} - y^2 = 1$$

1

hyperbola: $S[1;0]$
$a = 3$
$b = 1$
$e = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

1



B)

$$y^2 + 3x - 4 = 0$$
$$y^2 = -3x + 4$$
$$y^2 = -3\left(x - \frac{4}{3}\right)$$

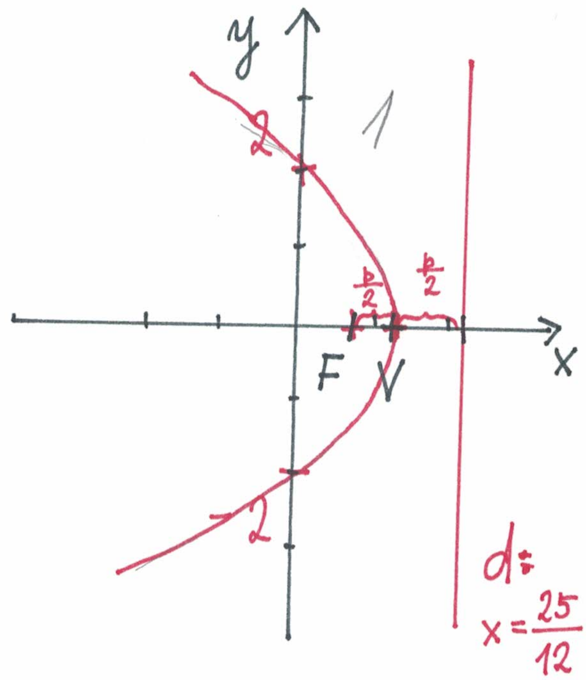
1

parabola: $V\left[\frac{4}{3};0\right]$
$2p = -3$
$\frac{p}{2} = -\frac{3}{4}$

1

$$F\left[\frac{4}{3} - \frac{3}{4};0\right] = \left[\frac{16-9}{12};0\right] = \left[\frac{7}{12};0\right]$$

řídicí přímka:
$$d: x = \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{16+9}{12} = \frac{25}{12}$$



Stupnice hodnocení písemné profilové maturitní zkoušky z matematiky

Třída 8.V a 4.B

šk. rok 2022/23

Výborně	55-47 bodů	100-85%
Chvalitebně	46-37 bodů	85-68%
Dobře	36-28 bodů	68-51%
Dostatečně	28-18 bodů	51-33%
Nedostatečně	17-0 bodů	33-0%